经典李代数中的幂零轨道：支配序

幂零锥和其上的几何：以 $\mathfrak{gl}_n$ 为例

sun123zxy

2026-05-09

1 支配序

本章讨论经典李代数中幂零轨道的支配序，证明支配序和分拆上的支配序等价．关于幂零轨道支配序的研究历史，[Jan04, section 13.16] 给出了一些评注；标准的参考是 [McG93, chapter 5]．我们选取的路线是：对 A 型李代数，基于盖住关系间连续路径的构造和秩函数的下半连续性，给出支配序和分拆上的支配序的等价性证明；对于 B、C、D 型李代数，我们选取特定方便处理的非退化双线性型，从而仔细为其上的每一类盖住关系显式构建落在斜自伴李代数中的连续路径．我们发现可以通过一类组合图示来统一紧凑地描述这些路径构造．

本章默认在 $\mathbb{C}$ 上工作．经典李代数均认为是具体的 $\mathbb{C}^n$ 上的矩阵代数．A 型李代数 $\mathfrak{sl}_n$ 的作用群默认为 SL_n，B、C、D 型李代数的作用群默认为定义它们的非退化双线性型给出的正交群．考虑到已经完成了经典李代数中幂零轨道的分类，可以用分拆或唯一标识幂零轨道．以后用 $\mathcal{O}_\lambda^{\mathfrak{sl}}$ 的记号表示 Jordan 型为 λ 的 $\mathfrak{sl}$ 中元素在 SL 下的共轭轨道．考虑到正交群作用下的 B、C、D 型李代数 $\mathfrak{g}$ 的幂零轨道由 GL 作用下的轨道给出，我们用 $\mathcal{O}_\lambda^{\mathfrak{g}} = \mathcal{O}_\lambda^{\mathfrak{sl}} \cap \mathfrak{g}$ 来标识 B、C、D 型在正交群作用下的幂零轨道．在上下文明确所在李代数的情况下，O_λ 的上标可能会作省略．

设 $\mathfrak{g}$ 为一经典李代数，$\mathcal{O}_1$ 和 $\mathcal{O}_2$ 为其上的两个幂零轨道．在幂零轨道上定义偏序：如果 $\mathcal{O}_1 \subseteq \overline{\mathcal{O}_2}$，就定义 $\mathcal{O}_1 \trianglelefteq \mathcal{O}_2$，称为幂零轨道上的支配序关系（dominance order．亦作闭包序，closure order）．这里取闭包使用的拓扑是 $\mathfrak{g}$ 作为仿射空间的 Zariski 拓扑．

注记（Specialization Order） 一般来讲，任何拓扑空间都可以通过取闭包包含的关系定义出一个预序（不保证反对称性的偏序关系），名曰 specialization preorder.

下面的结果将为我们证明轨道间的支配关系提供便利：只要 $\mathcal{O}_1$ 的任一元素落在 $\mathcal{O}_2$ 的闭包里，就有 $\mathcal{O}_1 \subseteq \overline{\mathcal{O}_2}$.

命题 1 设 $\mathfrak{g}$ 是经典李代数，G 是其轨道作用群，$\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ 为经典李代数 $\mathfrak{g}$ 上的共轭轨道．若 $\mathcal{O}_1 \cap \overline{\mathcal{O}_2} \neq \varnothing$，则 $\mathcal{O}_1 \subseteq \overline{\mathcal{O}_2}$.

证明 任取 $x \in \mathcal{O}_1 \cap \overline{\mathcal{O}_2}$．对任意 $y \in \mathcal{O}_1$，由轨道定义，存在 $g \in G$ 使得 $y = \mathrm{Ad}(g)x$．注意共轭作用 $\mathrm{Ad}(g)$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的自同胚（Zariski 拓扑意义下），故与取闭包运算交换，故

$$y = \mathrm{Ad}(g)x \in \mathrm{Ad}(g)(\overline{\mathcal{O}_2}) = \overline{\mathrm{Ad}(g)(\mathcal{O}_2)} = \overline{\mathcal{O}_2}$$

因此 $\mathcal{O}_1 \subseteq \overline{\mathcal{O}_2}$. $\square$

注记 关于共轭作用是同胚的事实涉及到轨道作用群作为代数群的性质．不熟悉代数群的读者可以暂时先承认这一命题.

2 A 型李代数

来看 A 型李代数 $\mathfrak{sl}_n$ 中幂零轨道的支配序. 为此在分拆上定义同名的偏序关系：如果分拆 λ 的每个部分和（前缀和）都大于等于 μ 的对应部分和，则定义 $\lambda \trianglerighteq \mu$. 支配序对应的盖住关系（covering relation）可以用 Young 图刻画：考虑 λ 对应 Young 图中那些比下一行至少多两个方块的行，让这一行最右侧方块 “掉落” 到下一行. 例如，$(4,2)$ 盖住 $(3,3)$ 的图示如下：

$$\begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \boxed{\bullet} \\ \bullet & \bullet & & \end{array} \quad \trianglerighteq \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \boxed{\bullet} \end{array}$$

下面的命题说明两种序其实没有区别 [McG93, theorem 6.2.5]：

定理 2 对 A 型李代数 $\mathfrak{sl}_n$ 及其上的两个幂零轨道 $\mathcal{O}_\lambda, \mathcal{O}_\mu$，$\lambda \trianglerighteq \mu$ 当且仅当 $\mathcal{O}_\lambda \trianglerighteq \mathcal{O}_\mu$.

$\Longrightarrow$ 侧思路概览 这里提供一种基于 “连续路径” 的证明. 考虑 running example $\lambda = (4,2)$, $\mu = (3,3)$，$\lambda \trianglerighteq \mu$. 如何连续地把幂零 Jordan 标准型矩阵 $J_{(4,2)}$ 变成 $J_{(3,3)}$ 呢？这样做：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1-t & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & t & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

这里列出标准基底 e_4 在上述矩阵多次作用下的变化情况：

$$e_4 \longrightarrow + \begin{cases} \quad te_6 \longrightarrow & \quad te_5 \longrightarrow & \quad 0 \\ (1-t)e_3 \longrightarrow & (1-t)e_2 \longrightarrow & (1-t)e_1 \longrightarrow \quad 0 \end{cases}$$

可以看到：

- 当 $t = 0$ 时，就是 $J_{(4,2)}$；
- 当 $t \neq 1$ 时，Jordan 型为 $(4,2)$；
- 当 $t = 1$ 时，Jordan 型突变为 $(3,3)$.

这是一条从 $\mathcal{O}_{(4,2)}$ 内部移动到 $\mathcal{O}_{(3,3)}$ 边缘的一条 “连续路径”. 抛开例子，上述论证对任意盖住关系都适用——只需关注 Young 图相邻两行之间的掉落，即可将这一保序映射扩展到任意 $\lambda \trianglerighteq \mu$. □

$\Longrightarrow$ 侧的证明 只需证明 λ 盖住 μ 的情形, 即 λ 的 Young 图通过掉落一个方块变成 μ 的 Young 图. 设是从 λ 的第 i 行掉到第 $i+1$ 行，记 $p = \lambda_i$, $q = \lambda_{i+1}$（从而 $p \geq q+2$）. 其余各行均不受扰动，故问题约化为构造从 $\mathcal{O}_{(p,q)}$ 到 $\mathcal{O}_{(p-1,q+1)}$ 的路径. 记 J_p, J_q 分别为 p 阶和 q 阶幂零 Jordan 块，$E_{i,j}$ 是基本矩阵，定义矩阵系列 $\Gamma := \{\Gamma(t) : t \in \mathbb{C}\}$：

$$\Gamma(t) := (J_p \oplus J_q) - tE_{p-1,\,p} + tE_{p+q,\,p} \qquad t \in \mathbb{C}$$

它是幂零锥内满足多项式方程 $x_{p-1,p}+x_{p+q,p} = 1$、其它位置固定的闭子集.考察标准基 $(e_1, e_2, \ldots, e_{p+q})$ 在 $\Gamma(t)$ 的作用下的变化情况：

$$\begin{aligned} \Gamma(t)e_1 &= 0 \\ \Gamma(t)e_{p+1} &= 0 \\ \Gamma(t)e_p &= (1-t)e_{p-1} - te_{p+q} \\ \Gamma(t)e_k &= e_{k-1} \quad \text{for all other unspecified entry } k \end{aligned}$$

只有 e_p 的变化情况依赖于 t.

- 当 $t \neq 1$，注意 $p \geq q+2$，故 e_p 恰需 p 次 $\Gamma(t)$ 作用变为 0. 取循环基底

  $$\{\Gamma(t)^k e_p\}_{0\leq k<p} \sqcup \{e_k\}_{p<k\leq p+q}$$

  这组基在 $(e_k)_{k=1}^n$ 下是对角线全一的下三角矩阵，故确实线性无关. 使用该循环基底可知 $\Gamma(t) \in \mathcal{O}_{(p,q)}$.

- 当 $t=1$ 时，e_p 恰需 $q+1$ 次 $\Gamma(t)$ 作用变为 0，取循环基底

  $$\{e_k\}_{1\leq k<p} \sqcup \{\Gamma(1)^k e_p\}_{0\leq k\leq q}$$

  这组基无非是 $(e_k)_{k=1}^n$ 的一个置换，故确实线性无关. 使用该循环基底可知 $\Gamma(1) \in \mathcal{O}_{(p-1,q+1)}$.

于是 Γ 只有一点不在 $\mathcal{O}_{(p,q)}$ 中，$\Gamma \cap \overline{\mathcal{O}_{(p,q)}} \supseteq \overline{\Gamma \cap \mathcal{O}_{(p,q)}} = \Gamma$，即 $\Gamma \subseteq \overline{\mathcal{O}_{(p,q)}}$. 故 $\Gamma(1) \in \overline{\mathcal{O}_{(p,q)}}$，结合命题 1 即得 $\mathcal{O}_{(p-1,q+1)} \subseteq \overline{\mathcal{O}_{(p,q)}}$. □

$\Longleftarrow$ **侧的证明** 注意如下若干事实：

- $\lambda \trianglerighteq \mu$ 当且仅当 $\lambda^T \trianglelefteq \mu^T$ [McG93, lemma 6.3.1]：可以通过 Young 图的掉落操作直观感受和证明这一点.

- 秩函数具有下半连续性（lower semicontinuity）：秩不大于某数 k 的矩阵是闭集. 秩的子式定义可以为此提供一个一句话证明：对这些矩阵的要求等价于大于 k 阶的子式全为零. 更一般地，对任意 $i \in \mathbb{N}$，函数 $A \mapsto \mathrm{rk}(A^i)$ 也是下半连续的. 此性质使得当我们对幂零轨道取闭包时，元素及其幂次的秩都不会增加.

- 基于秩的 Jordan 型计算：Jordan 型为 λ 的幂零矩阵 X 满足其 i 次幂的秩就是 Young 图 λ 去掉前 i 列剩下的方块数：

  $$\mathrm{rk}\, X^i = n - \sum_{k=1}^{i} (\lambda^T)_k, \quad i = 0, 1, \ldots$$

  这里 λ^T 是分拆 λ 的转置，即 Young 图沿主对角线的翻转. 反过来这为我们提供了计算 Jordan 型的秩方法：

  $$(\lambda^T)_k = \mathrm{rk}\, X^{k-1} - \mathrm{rk}\, X^k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

  此外，X^i 的 Jordan 型的转置为 $(n - \mathrm{rk}\, X^i, \mathrm{rk}\, X^i - \mathrm{rk}\, X^{i-1}, \mathrm{rk}\, X^{i+1} - \mathrm{rk}\, X^i, \ldots)$.

现在设 $\overline{\mathcal{O}_\lambda} \supseteq \mathcal{O}_\mu$. 不妨任取代表元 $X \in \mathcal{O}_\lambda, Y \in \mathcal{O}_\mu$. 对任意 $i \geq 1$，由 $A \mapsto \mathrm{rk}(A^i)$ 的下半连续性，$\mathrm{rk}\, Y^i \leq \mathrm{rk}\, X^i$，故

$$n - \sum_{k=1}^{i} (\mu^T)_k = \mathrm{rk}\, Y^i \leq \mathrm{rk}\, X^i = n - \sum_{k=1}^{i} (\lambda^T)_k$$

即 μ^T 的第 i 个部分和大于等于 λ^T 的第 i 个部分和，故 $\mu^T \trianglerighteq \lambda^T$，$\lambda \trianglerighteq \mu$. □

3 B、C、D 型李代数

定理 3 对任意经典李代数 $\mathfrak{g}$ 及其上的两个幂零轨道 $\mathcal{O}_\lambda, \mathcal{O}_\mu$，$\lambda \trianglerighteq \mu$ 当且仅当 $\mathcal{O}_\lambda \trianglerighteq \mathcal{O}_\mu$.

细心的读者可能已经发现，定理 2 $\Longleftarrow$ 一侧的证明对所有经典李代数都适用．本节的主要工作是证明 $\Longrightarrow$ 侧．大体的思路仍然是为每个盖住关系构造一条连续路径．不同于 A 型李代数，由于 B、C、D 型李代数的幂零轨道的 Jordan 型存在额外的限制条件，需要讨论的情况更多更复杂.

【TODO】

参考文献

[Jan04] Jens Carsten Jantzen. "Nilpotent Orbits in Representation Theory". In: *Lie Theory: Lie Algebras and Representations*. Ed. by Jens Carsten Jantzen et al. Boston, MA: Birkhäuser, 2004, pp. 1–211. ISBN: 978-0-8176-8192-0. DOI: 10.1007/978-0-8176-8192-0_1. URL: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8192-0_1 (visited on 06/27/2025).

[McG93] William M. McGovern. *Nilpotent Orbits In Semisimple Lie Algebra: An Introduction*. New York: Routledge, 1993. 192 pp. ISBN: 978-0-203-74580-9. DOI: 10.1201/9780203745809.