Schur–Weyl 对偶

sun123zxy

2026-04-19

1 从 Sym 和 Alt 谈起

众所周知，设 G 是群，则对任意 G 的 n 维表示 V，$V \otimes_{\mathbb{C}} V$ 都可以分解为子表示 $\mathrm{Sym}^2 V$ 和 $\mathrm{Alt}^2 V$ 的直和，其中

- $\mathrm{Sym}^2 V$ 由 $v \otimes w + w \otimes v$ 生成，在交换 $V \otimes V$ 的作用下稳定，是左作用 G 的不变子空间，维数为 $\left(\!\binom{n}{2}\!\right) = \frac{n(n+1)}{2}$.
- $\mathrm{Alt}^2 V$ 由 $v \otimes w - w \otimes v$ 生成，在交换 $V \otimes V$ 的作用下变号，是左作用 G 的不变子空间，维数为 $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

对一般的 $T^d V := V^{\otimes d}$，也会想要获得类似的分解．当然还是先类似定义子表示 $\mathrm{Sym}^d V$ 和 $\mathrm{Alt}^d V$．此时考虑 d 阶置换群 $\mathcal{S}_d$ 在 $V^{\otimes d}$ 上的作用变得有益：定义

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) \cdot \sigma := v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)}$$

为什么是右作用？因为这是对多重张量位置的置换，而位置的置换是右作用．线性扩展后这将 $V^{\otimes d}$ 做成右 $\mathbb{C}[\mathcal{S}_d]$-模．于是

	$\mathrm{Sym}^d V$	$\mathrm{Alt}^d V$
作为右作用 $\mathcal{S}_d$ 的像	$V^{\otimes d}$ 在右作用 $\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_d} \sigma \in \mathbb{C}[\mathcal{S}_d]$ 下的像	$V^{\otimes d}$ 在右作用 $\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_d} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma \in \mathbb{C}[\mathcal{S}_d]$
作为右作用 $\mathcal{S}_d$ 的核	全体在 $\mathcal{S}_d$ 右作用下稳定的元素构成的不变子空间	全体在 $\mathcal{S}_d$ 右作用下按置换的 sgn 变号
关于左作用 G	G 的子表示	G 的子表示
维数	$\left(\!\binom{n}{d}\!\right) = \frac{n(n+1)\cdots(n+d-1)}{d!}$	$\binom{n}{d} = \frac{n(n-1)\cdots(n-d+1)}{d!}$

这两个空间还是无交，但它们不再张成整个 $V^{\otimes d}$ 了——对 $d \geq 3$ 的情况 $n^d > \left(\!\binom{n}{d}\!\right) + \binom{n}{d}$. $V^{\otimes d}$ 中还藏有其它 $\mathcal{S}_d$ 或 G 的不变子空间.

2 Schur–Weyl 对偶

Schur–Weyl 对偶对此给出了一个非常漂亮的答案：作为 $(\mathrm{GL}(V), \mathcal{S}_d)$-双模，

$$V^{\otimes d} \cong \bigoplus_{\lambda} \mathbb{S}_\lambda V \otimes_{\mathbb{C}} V_\lambda$$

这里 $\lambda \vdash d$ 取遍所有 d 长度不超过 n 的分拆，V_λ 是 $\mathcal{S}_d$ 的不可约表示，$\mathbb{S}_\lambda V$ 是 $\mathrm{GL}(V)$ 的不可约代数表示.

这里做一些讨论.

首先，之前讨论的是任意群 G 左作用在 V 上的情况，而根据群同态 $G \to \mathrm{GL}(V)$，每个 $(G, \mathcal{S}_d)$-双模自动成为一个 $(\mathrm{GL}(V), \mathcal{S}_d)$-双模，故 Schur–Weyl 对偶给出的分解适用于任意群 G 左作用在 V 上的情况.

其次来指明 V_λ 和 $\mathbb{S}_\lambda V$ 的定义：

- $\mathbb{C}[\mathcal{S}_d]$-右模 $V_\lambda := c_\lambda \cdot \mathbb{C}[\mathcal{S}_d]$，其中 c_λ 是 $\mathcal{S}_d$ 中的 Young 对称化子. 注意这里的 c_λ 乘在左边，与我们平时习惯的左作用情形对偶.

注记 V_λ 的记号里虽然有 V，实际上和 V 没有联系. 要怪就怪 Fulton–Harris 是这么写的吧.

- $\mathrm{GL}(V)$-左模 $\mathbb{S}_\lambda V := V^{\otimes d} \cdot c_\lambda$.

  注意在此记号下，$\mathrm{Sym}^d V$ 和 $\mathrm{Alt}^d V$ 恰好分别是 $\lambda = (d)$ 和 $\lambda = (1, \ldots, 1)$ 的 $\mathbb{S}_\lambda V$.

  $\mathbb{S}_\lambda$ 其实是个函子：定义 $\mathbb{S}_\lambda$ 在线性映射 $f : V \to W$ 上的作用 $\mathbb{S}_\lambda f$ 为 $f^{\otimes d} : V^{\otimes d} \to W^{\otimes d}$ 限制到 $\mathbb{S}_\lambda V \to \mathbb{S}_\lambda W$ 上. 容易验证 $\mathbb{S}_\lambda W$ 一侧是良定的. $\mathbb{S}_\lambda$ 就是所谓的 Schur 函子.