Jacobson–Morozov：$\mathfrak{sl}_2$ 在复半单李代数中的嵌入

幂零锥和其上的几何：以 $\mathfrak{gl}_n$ 为例

sun123zxy

2026-04-10

我们在复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 中工作，并假设抽象 Jordan 分解、Killing 型和 Cartan 根空间分解理论已建立完毕．这一部分的标准参考是 [McG93, section 3.2–3.3].

定理 1（Jacobson–Morozov） [McG93, theorem 3.3.1] 设 $\mathfrak{g}$ 为一复半单李代数，对任意幂零元 $e \in \mathfrak{g}$，存在 $h, f \in \mathfrak{g}$ 使得 e, h, f 满足 $\mathfrak{sl}_2$ 的 Lie 括号关系 $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$, $[e, f] = h$.

完整证明很长，先来看一些结果.

1 $\mathfrak{sl}_n$ 的特例

首先，此定理在 $\mathfrak{sl}_n$ 的情形下有一个显式的构造 [McG93, corollary 3.2.7]：对任意幂零元 $e \in \mathfrak{sl}_n$，适当共轭可将其化为 Jordan 标准型 J_λ，于是可以分块考虑．在每个大小为 $m+1$ 的小块中，熟记 $\mathfrak{sl}_2$ 的标准 $m+1$ 维不可约表示

$$e = \begin{pmatrix} 0 & m & & & \\ & 0 & m-1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & m & 0 \end{pmatrix}$$

$$h = \operatorname{diag}(m, m-2, \ldots, -m+2, -m)$$

故适当放缩基向量就可对齐 e 并拼出 h 和 f.

2 Jacbobson–Morozov 定理的证明

这里给出的证明跟随 [McG93, theorem 3.3.1]．对维数 $\mathfrak{g}$ 做归纳，则可以先假设 e 不落在 $\mathfrak{g}$ 任何真半单子李代数中——否则直接在那个更小的半单李代数中构造 h 和 f 即可．这会帮我们在后面排除一大类讨论情况.

下面开始构造．先构造 $h \in \mathfrak{g}$ 使得 $[h, e] = 2e$，为此只需证明 $e \in [e, \mathfrak{g}]$．注意

- e 的中心化子 $\mathfrak{z}(e)$ 和 $[e, \mathfrak{g}]$ 互为（Killing 型意义下的）正交补：

$$\kappa(\mathfrak{z}(e), [e, \mathfrak{g}]) = \kappa([\mathfrak{z}(e), e], \mathfrak{g}) = 0$$

故 $\mathfrak{z}(e)$ 与 $[e,\mathfrak{g}]$ 正交．又由正合列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{z}(e) \longrightarrow \mathfrak{g} \xrightarrow{\operatorname{ad} e} [e,\mathfrak{g}] \longrightarrow 0$$

考察维数并使用 Killing 型在半单李代数中的非退化性就有正交补关系．注意此部分证明与 e 的幂零性无关．

- $e \in \mathfrak{z}(e)^{\perp}$：对任意与 e 交换的 $x \in \mathfrak{z}(e)$，$\operatorname{ad} x$ 也与 $\operatorname{ad} e$ 交换，故 e 幂零即是 $\operatorname{ad} e$ 幂零进而导致 $\operatorname{ad} e \circ \operatorname{ad} x$ 幂零．因此 $\kappa(e,x) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} e \circ \operatorname{ad} x) = 0$.

综上 $e \in [e,\mathfrak{g}]$，于是存在 $h \in \mathfrak{g}$ 使得 $[h,e] = 2e$.

再修改 h 使其半单．考虑 h 的抽象 Jordan 分解 $h = h_s + h_n$，其中 h_s 半单，h_n 幂零．注意 h_s, h_n 均与 h 交换，故共享特征向量 e，因此 $[h_n, e] = 0$ 导致 $[h_s, e] = 2e$．取新的 $h := h_s$ 即可.

半单的 h 使得可以关于它将 $\mathfrak{g}$ 做权空间分解 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$，于是 $h \in \mathfrak{g}_0$，$e \in \mathfrak{g}_2$，且容易验证 $[e,\mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{g}_{i+2}$．现在来构造 f．它需要满足 $[h,f] = -2f$，故应当在 $\mathfrak{g}_{-2}$ 中寻找．它还需满足 $[e,f] = h$，故只需证 $h \in [e,\mathfrak{g}_{-2}]$．如果我们**暂时断言** $h \in [e,\mathfrak{g}]$，则 $h \in \bigoplus_i [e,\mathfrak{g}_i]$．但 $h \in \mathfrak{g}_0$，逼迫 $h \in [e,\mathfrak{g}_{-2}]$，证毕.

现在来证明断言 $h \in [e,\mathfrak{g}]$，已有的条件是 $[h,e] = 2e$ 及 h 半单．仍然用关系 $[e,\mathfrak{g}] = \mathfrak{z}(e)^{\perp}$，只需证 h 与 $\mathfrak{z}(e)$ 正交．注意 h 在 $\mathfrak{z}(e)$ 上的伴随作用稳定且半单，因此可对 $\mathfrak{z}(e)$ 做权空间分解 $\mathfrak{z}(e) = \bigoplus_i \mathfrak{z}(e)_i$．于是对任意 $z_i \in \mathfrak{z}(e)_i$，

$$0 = \kappa([h,h], z_i) = \kappa(h, [h, z_i]) = i \cdot \kappa(h, z_i)$$

故 h 与 $\mathfrak{z}(e)_i$ 正交对任意 $i \neq 0$ 成立.

现在只需证 h 与 $\mathfrak{z}(e)_0$ 正交．对任意 $z_0 \in \mathfrak{z}(e)_0$，注意 z_0 与 e 和 h 交换．不失一般性，可设 z_0 半单：

- 因为其半单部分 $(z_0)_s$ 与 h 正交当且仅当 z_0 与 h 正交：为此只需证幂零部分 $(z_0)_n$ 与 h 正交，这是因为 $(z_0)_n$ 与 z_0 交换进而与 h 交换，故 $\operatorname{ad} h \circ \operatorname{ad}(z_0)_n$ 是幂零，因此 $\kappa(h,(z_0)_n) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} h \circ \operatorname{ad}(z_0)_n) = 0$.

下面证明在上述限制下只能有 $z_0 = 0$，从而 h 与 $\mathfrak{z}(e)_0$ 的正交性平凡．为此反设 $z_0 \neq 0$，需要使用一个结论：

- 约化李代数任意半单元的中心化子是也是约化李代数 [McG93, lemma 2.1.2].

于是 $\mathfrak{z}(z_0)$ 是约化李代数．$\mathfrak{g}$ 半单中心平凡保证 $\mathfrak{z}(z_0)$ 比 $\mathfrak{g}$ 严格更小．注意 $e, h \in \mathfrak{z}(z_0)$，于是 $2e = [h,e] \in [\mathfrak{z}(z_0), \mathfrak{z}(z_0)]$，后者是一个半单李代数．终于，我们把 e 放到了一个比 $\mathfrak{g}$ 严格更小的半单李代数 $[\mathfrak{z}(z_0), \mathfrak{z}(z_0)]$ 中，但是这与整个证明一开始的假设冲突．因此 $z_0 = 0$，h 与 $\mathfrak{z}(e)$ 正交，断言得证.

参考文献

[McG93] William M. McGovern. *Nilpotent Orbits In Semisimple Lie Algebra: An Introduction*. New York: Routledge, 1993. 192 pp. ISBN: 978-0-203-74580-9. DOI: `10.1201/9780203745809`.