作用群的选择

幂零锥和其上的几何：以 $\mathfrak{gl}_n$ 为例

sun123zxy

2026-03-30

上篇 中简单介绍了复数域上 $\mathfrak{gl}_n$ 或 $\mathfrak{sl}_n$ 的共轭 / 幂零轨道的定义．这是 ad hoc 的．一般来说，不同的群作用在李代数 $\mathfrak{g}$ 上可能导致不同的轨道．本篇介绍我们选择作用群的标准，主要参考 [McG93, section 1.2].

仍然以 $\mathfrak{gl}_n$ 为例．一般来说，我们可以考虑全体 $\mathfrak{gl}_n$ 的李代数同构 $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{gl}_n}(\mathfrak{gl}_n)$ 在 $\mathfrak{gl}_n$ 上的作用．这是个代数群，其上的几何结构由如下一般的步骤得到：

- 设 $\mathfrak{g}$ 是一个 n 维李代数，则选取一组基底 $(e_i)_{i=1}^n$ 可获得 n 维仿射空间结构
- 全体其上的线性变换 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ 是 n^2 维的仿射空间，基底 $(E_{i,j})_{i=1,j=1}^{n,n}$ 由 $\mathfrak{g}$ 的基底诱导得到
- 在 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ 上做线性同构限制，即要求行列式非零，得到开子簇 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$．注意这个动作也可以实现为仿射簇.
- 在 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ 上做李代数同态限制得到 $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$，即要求

  $$\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)], \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$$

  此式关于 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ 的基底线性展开后是若干关于 φ 在基底 $(E_{i,j})$ 下线性组合系数的多项式方程．因此 $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ 的闭子集．【TODO：簇?】
- 取 $\mathrm{Aut}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) := \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$，这是 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ 的拟仿射子【TODO】

注记 TODO：看上去这个过程对一般的 $\mathfrak{g}$-模也可以做．特别地，上面相当于是在对伴随表示 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ 做.

——这是一个相当大的群，共轭作用

$$\mathrm{Ad}(\mathrm{GL}_n) := \{X \mapsto AXA^{-1} : A \in \mathrm{GL}_n\} \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{gl}_n)$$

只是其中的一小部分.

命题 1 $\mathrm{GL}_n, \mathrm{SL}_n, \mathrm{PSL}_n$ 在 $\mathfrak{gl}_n$ 上的共轭作用导致相同的轨道.

这里 $\mathrm{SL}_n := \{g \in \mathrm{GL}_n : \det g = 1\}$ 是 GL_n 的子群，$\mathrm{PSL}_n := \mathrm{SL}_n / Z(\mathrm{SL}_n)$ 是 SL_n 的商群，$Z(\mathrm{SL}_n)$ 是 SL_n 的中心.

这是因为任意 $A \in \mathrm{GL}_n$ 的共轭作用 $X \mapsto AXA^{-1}$ 都等价于 $(\det A)^{1/n} \in \mathrm{SL}_n$ 的共轭作用，而中心在共轭作用下不起作用.

注记 可以看到这开始和基域的选择有关．考虑群正合列：

$$1 \longrightarrow \mathrm{SL}_n \longrightarrow \mathrm{GL}_n \xrightarrow{\det} \mathbb{C}^\times \longrightarrow 1$$

右分裂同态 $c \mapsto (\det c)^{1/n}$ 使得其右侧分裂，从而 $\mathrm{GL}_n = \mathrm{SL}_n \rtimes Z(\mathrm{GL}_n) \cong \mathrm{SL}_n \rtimes \mathbb{C}^\times$．但这是复数域能够开根的结果．

TODO: 这也许和所谓的 split reductive group 有关．

因此在 $\mathfrak{gl}_n$ 上，$\mathrm{GL}_n, \mathrm{SL}_n, \mathrm{PSL}_n$ 的选择是等价的．这三个群作用都是直接由共轭作用诱导的．可以认为 $\mathrm{PSL}_n \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{gl}_n)$．

参考文献

[McG93] William M. McGovern. *Nilpotent Orbits In Semisimple Lie Algebra: An Introduction*. New York: Routledge, 1993. 192 pp. ISBN: 978-0-203-74580-9. DOI: 10.1201/9780203745809.