有限群表示论：Peter–Weyl 定理

sun123zxy

2026-03-14

1　从左模到双模

有限群表示论的一个经典结果是正则表示的分解：

$$\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_i V_i^{\oplus \dim V_i}$$

这里 $\mathbb{C}[G]$ 是群 G 的群代数，V_i 是 G 的全体不可约表示．这只是个左 $\mathbb{C}[G]$-模的分解：$\mathbb{C}[G]$ 被分解成了其单左理想的直和．但是 $\mathbb{C}[G]$ 是个环，完整来说我们应该研究其作为 $\mathbb{C}$-代数的分解．Peter–Weyl / Wedderburn–Artin 定理给出了它的分解：

$$\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_i \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V_i) \cong \bigoplus_i V_i \otimes_{\mathbb{C}} V_i^*$$

可见其结构确实变得更加丰富．稍做辨析：

1.1　双模观点

- 这里每份投影 $\pi_i : \mathbb{C}[G] \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$ 都是表示 $\rho_{V_i} : G \to \mathrm{GL}(V_i)$ 直接线性扩张得到——因此 Peter–Weyl 定理实质上是在说，$\mathbb{C}[G]$ 在其每个不可约表示上的作用完全决定了 $\mathbb{C}[G]$ 的代数结构．
- 容易验证每个 π_i 都是 $(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}[G])$-代数同态——保加法，保乘法，保数乘，保左、右 G-作用．这里的分解是在此意义下的同构．
- V_i 是 G 的不可约表示，配备左 $\mathbb{C}[G]$-模结构．
- V_i^* 是 V_i 的对偶空间，配备右 $\mathbb{C}[G]$-模结构 $(f \cdot g)(v) := f(g \cdot v)$．

注记　在经典的有限群表示论中，那时我们希望 V_i^* 是左 $\mathbb{C}[G]$-模，所以当时配备的是 $(f \cdot g)(v) := f(g^{-1} \cdot v)$．这里就是想要右模结构，所以不用取逆生造了．

- $V_i \otimes_{\mathbb{C}} V_i^*$ 通过 $(\mathbb{C}[G], \mathbb{C})$-双模和 $(\mathbb{C}, \mathbb{C}[G])$-双模的张量积获得一个 $(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}[G])$-双模结构：

  $$g \cdot (v \otimes f) \cdot h := (g \cdot v) \otimes (f \cdot h)$$

  其内部乘法是缩并运算．这使得其成为一个 $(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}[G])$-代数．

- 对左 $\mathbb{C}[G]$-模 U, W，为了使自然同构 $W \otimes_{\mathbb{C}} U^* \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(U, W)$ 成立，为 $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(U, W)$ 配备 $(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}[G])$-双模结构

  $$(g \cdot \varphi \cdot h)(u) := g \cdot \varphi(h \cdot u)$$

  特别地，在 $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V_i) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V_i, V_i)$ 定义内部乘法是函数复合，则 $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$ 也获得 $(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}[G])$-代数结构．

注记 平时仅考虑左模结构时，为使记号对齐，通常喜欢写 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)\cong V^*\otimes_{\mathbb{C}} W$——这无伤大雅，反正 V^* 强行通过 g^{-1} 获得了左 $\mathbb{C}[G]$-模结构. 但对双模的情况，左 $\mathbb{C}[G]$-作用是由 W 负责，右 $\mathbb{C}[G]$-作用是由 V^* 负责，我们就最好不要交换它们了.

- 不会因为仅将此分解视为环的分解受到任何处分——通过表示诱导的映射 $\pi_i : \mathbb{C}[G]\to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$ 足以将 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$ 上的乘法结构拉回得到其 $(\mathbb{C}[G],\mathbb{C}[G])$-双模结构.
- 反过来，仅考虑 $(\mathbb{C}[G],\mathbb{C}[G])$-双模结构也没有问题：将会证明 π_i 是满射，即每个 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$ 都是可以写作某一 $\mathbb{C}[G]$-左作用.

1.2 左模观点

考虑到群代数有对极映射 $g\mapsto g^{-1}$，这使得可以将任何 V 上的 (G,H)-双边表示结构强行翻成 $G\times H$-群表示结构研究：

$$(g,h)\cdot v := g\cdot v\cdot h^{-1}$$

或在模的语言下：任何 $(\mathbb{C}[G],\mathbb{C}[H])$ 双模结构可被强行翻成 $(\mathbb{C}[G]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[H])$ 结构. 这样的好处是可以直接套用之前对群表示的语言来表达双模. 例如，在此风格表述下的 Peter–Weyl 定理

$$\mathbb{C}[G]\cong \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)\cong \bigoplus_i V_i\otimes_{\mathbb{C}} V_i^*$$

应当理解为 $\mathbb{C}[G]$ 作为 $G\times G$-群表示的分解，其中

- $\otimes_{\mathbb{C}}$ 是 $G\times G$-群表示的张量积
- $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$ 是 $G\times G$-表示，其上第一个 G-自然作用在值域 V_i，第二个 G-作用取逆作用在定义域 V_i
- V_i 是 $G\times G$-表示，其上第一个 G-作用自然，第二个 G-作用平凡
- V_i^* 是 $G\times G$-表示，其上第一个 G-作用平凡，第二个 G-作用取逆作用在定义域 V_i

注记 这似乎只是把双边代数表示翻译到 Hopf 代数表示的抽象废话，但在如 Schur–Weyl 对偶中，会看到这种翻译能有效简化表述.

2 证明

我们提供几条依赖不同工具的证明路线，读者可按前置情况任选.

- 有关有限群表示论的基础内容可参见有限群表示论速通.

先证 π 是单射：

- 这里的证明依赖有限群表示论的 Maschke 定理（半单性).

  若一 $\mathbb{C}[G]$ 元素在每个不可约表示上作用均为 0，由半单性，$\mathbb{C}[G]$ 自己分解成若干不可约表示的直和，所以该元素在 $\mathbb{C}[G]$ 上作用也为 0. $\mathbb{C}[G]$ 在自己上作用当然是忠实的，所以该元素只能是 0.

则只需证 π 是满射. 这里有多种可供选择的路线：

- 依赖有限群表示论的维数平方和公式 $\sum_i(\dim V_i)^2=|G|$：[FH04, Proposition 3.29]

  $\dim\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)=(\dim V_i)^2$，$\dim\mathbb{C}[G]=|G|$ 维数逼迫单射 π 也是满射.

- 依赖 矩阵代数的 Burnside 定理，该定理的证明可以仅依赖初等线性代数：
  - 复数域上矩阵代数的含幺子结合代数如果不可约，则一定是整个.

  则考察含幺结合代数 $\mathbb{C}[G]$ 在 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$ 上的像，确为 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$ 的不可约含幺子结合代数. 故根据 Burnside 定理，$\mathbb{C}[G]$ 在每个 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$ 上的像都必须是全体.

注记 依赖 Burnside 定理的满射性证明甚至不需要 G 是有限群，

我们还可以显式构造 π 的逆 ι 来获得一个构造性的证明：

- 先来构造 $(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}[G])$ 双模同态 $\iota_i : \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i) \to \mathbb{C}[G]$：

  $$\varphi \mapsto \frac{\dim V_i}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(\varphi \circ \rho_{V_i}(g^{-1}))g$$

  等价地，$V_i \otimes_{\mathbb{C}} V_i^* \to \mathbb{C}[G]$ 的版本是

  $$v \otimes f \mapsto \frac{\dim V_i}{|G|} \sum_{g \in G} f(g^{-1} \cdot v)g$$

  固定 V_i 一组基 (e_i^k) 并生成 V_i^* 上的对偶基 (f_i^j)，则此映射有矩阵风格的解读：将 $g \in G$ 映射到 $\rho_{V_i}(g^{-1})$ 的第 j 行第 k 列元素取出得到一 $L^2(G)$ 内函数

  $$\rho_{V_i}^{j,k}(g) := f_i^j(\rho_{V_i}(g^{-1}) \cdot e_i^k)$$

  再等价地看作 $\mathbb{C}[G]$ 的元素，最后适当归一化.

- 我们可以证明 ι_i 是单射，且每个 ι_i 的像之间两两正交.

  $L^2(G)$ 上有函数空间的标准内积. 考虑 $e_{i_2}^{k_2} \otimes f_{i_1}^{j_1} \in V_{i_2} \otimes_{\mathbb{C}} V_{i_1}^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{i_1}, V_{i_2})$，对其平均化得

  $$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{V_{i_2}}(g) \circ \left(e_{i_2}^{k_2} \otimes f_{i_1}^{j_1}\right) \circ \rho_{V_{i_1}}(g^{-1}) \in \mathrm{Hom}_G(V_{i_1}, V_{i_2})$$

  再对此 $\mathrm{Hom}_G(V_{i_1}, V_{i_2})$ 中映射取第 j_2 行第 k_1 列元素得

  $$\begin{aligned} &\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_{i_2}^{j_2} \left(\rho_{V_{i_2}}(g) \circ \left(e_{i_2}^{k_2} \otimes f_{i_1}^{j_1}\right) \circ \rho_{V_{i_1}}(g^{-1}) \cdot e_{i_1}^{k_1}\right) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_{V_{i_2}}^{j_2,k_2}(g) \cdot \rho_{V_{i_1}}^{j_1,k_1}(g^{-1}) \\ &= \langle \rho_{V_{i_2}}^{j_2,k_2}, \rho_{V_{i_1}}^{j_1,k_1} \rangle \end{aligned}$$

  回忆 Schur 引理对 $\mathrm{Hom}_G(V_{i_1}, V_{i_2})$ 的刻画，这恰是在说此内积非零当且仅当 $i_1 = i_2$ 且 $j_1 = j_2$ 且 $k_1 = k_2$. 因此 $\rho_{V_i}^{j,k}$ 两两正交. 当 $i = i_1 = i_2$, $j = j_1 = j_2 = k = k_1 = k_2$ 时，$e_i^j \otimes f_i^j \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$ 的迹为 1，而平均化不改变迹并将其变为 V_i 上的数乘，因此 $\langle \rho_{V_i}^{j,k}, \rho_{V_i}^{j,k} \rangle = 1/\dim V_i$. 因此 ι_i 是单射，且每个 ι_i 的像之间两两正交.

- 最后验证 $\iota_i \circ \pi_i = \mathrm{id}_{\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)}$ 结束讨论. 【TODO】

3 推论

来看上述分解导致的事实.

3.1 维数平方和

首先，如果你选择的证明路线没有循环论证之嫌，可以通过维数再次看出维数平方和公式

$$|G| = \sum_i (\dim V_i)^2$$

3.2 共轭类计数

其次，对这分解取中心：

$$Z(\mathbb{C}[G]) \cong \bigoplus_i Z(\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i))$$

- $Z(\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i))$ 是 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$ 的中心，而（根据满射性）所有 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$ 都可实现为 V_i 上的 G-左作用，因此这中心恰为 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(V_i)$. 回忆 Schur 引理，$V_i$ 是不可约表示，所以 $Z(\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(V_i) = \mathbb{C}\,\mathrm{id}_{V_i}$，维数为 1.
- $Z(\mathbb{C}[G])$ 是什么?

  设 $\sum_{h\in G} \chi(h)h \in Z(\mathbb{C}[G])$，这即是要求对任意 $g \in G$，有

  $$\sum_{h\in G} \chi(h)h = g\left(\sum_{h\in G} \chi(h)h\right)g^{-1} = \sum_{h\in G} \chi(h)ghg^{-1} = \sum_{h\in G} \chi(g^{-1}hg)h$$

  即 $\chi(g^{-1}hg) = \chi(h)$——在共轭类上取常值——$Z(\mathbb{C}[G])$ 就是类函数全体！其维数等于 G 的共轭类的数量.

两条连起来看：G 的共轭类的数量等于 G 的不可约表示的数量.

注记（左模观点） 回忆 $\mathbb{C}[G]$ 也作为 $G \times G$-群表示分解. 让我们使用对角映射 $g \mapsto (g, g)$ 将 Peter–Weyl 分解

$$\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_i \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$$

看成 G-表示的分解，于是 $\mathbb{C}[G]$ 上的 G-作用是共轭 $g \cdot x := gxg^{-1}$，$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$ 上的 G-作用也是共轭 $(g \cdot \varphi)(v) := g \cdot \varphi(g^{-1} \cdot v)$. 两边同时取 G-不变子空间，得到

$$(\mathbb{C}[G])^G \cong \bigoplus_i \mathrm{End}_G(V_i)$$

左边作为线性空间同构于 G 的类函数空间，右边又使用 Schur 引理，我们再次得到共轭类计数的结论.

3.3 交换群、循环群、DFT

如果 G 是交换群，则每个不可约表示 V_i 都是 1 维. 因此在 $\mathbb{C}$-代数同构意义下有

$$\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_i \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i) \cong \mathbb{C}^{\oplus|G|} \cong L^2(G)$$

来考察这个同构具体是什么. 每个 $\pi_i : \mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i) \cong \mathbb{C}$ 即为 V_i 对应的特征标 $\chi_i : G \to \mathbb{C}$ 线性张成的结果.

考虑到有限交换群基本定理，不妨来考虑最简单的循环群 $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. 其第 k 个不可约表示，或特征标由 $1 \mapsto \zeta_n^k$ 给出，这里 $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ 是 n-次单位根. 则上述同构是在说 DFT 矩阵 $(\zeta_n^{jk})_{0\le j,k<n}$ 可逆——当然可逆，而且是正交的. 这是所谓的离散 Fourier 变换.

3.4 直和分解的典范投影

对任意 G-表示 V，大力自然同构

$$\begin{aligned}V &\cong \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[G]} V \\ &\cong \bigoplus_i \mathrm{End}(V_i) \otimes_{\mathbb{C}[G]} V \\ &\cong \bigoplus_i V_i \otimes_{\mathbb{C}} V_i^* \otimes_{\mathbb{C}[G]} V \\ &\cong \bigoplus_i V_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V_i, V)\end{aligned}$$

注意 $\dim \mathrm{Hom}_G(V_i, V)$ 就是 V_i 在 V 中的重数，因此 $V_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V_i, V)$ 就是 V 的各不可约成分，上述同构给出了 V 的不可约成分的自然拆解——不同于证明半单性时对补空间的依赖，由于之前在 Peter–Weyl 的证明中给出了完全构造性的同构，这里的拆解也是完全构造性的，可以直接写出典范嵌入

$$\begin{aligned}\iota_i : V_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V_i, V) &\to V \\ v \otimes \varphi &\mapsto \varphi(v)\end{aligned}$$

和典范投影

$$\begin{aligned}\pi_i : V &\to \bigoplus_i V_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V_i, V) \\ \iota_i \circ \pi_i &= \frac{\dim V_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{V_i}(g)} \rho_V(g)\end{aligned}$$

参考文献

[FH04] William Fulton and Joe Harris. *Representation Theory*. Vol. 129. Graduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer, 2004. ISBN: 978-3-540-00539-1 978-1-4612-0979-9. DOI: `10.1007/978-1-4612-0979-9`. URL: `http://link.springer.com/10.1007/978-1-4612-0979-9` (visited on 06/01/2025).