有限群表示论速通

A Quick Tour of the Representation Theory of Finite Groups

sun123zxy

2026-03-15

摘要

参考 Fulton–Harris [FH04, chapter 1–2]，优雅、迅速、坐标无关地完成有限群有限维复表示论的入门.

设 G 是有限群，V 是（有限维的）$\mathbb{C}$-线性空间，则群同态 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 规定了一个 G 的（复）表示. 等价地，这为 V 配备了一个 G-模结构——$\mathbb{C}[G]$-模结构的简写.

有限群有限维复表示论完成了分类有限群有限维复表示的一般工作，其主要结果可概括为：

- 半单性：任意有限群的有限维复表示一定分解为若干不可约表示的直和.（定理 1）
  - 高观点：表示环 $R(G)$ 是自由 $\mathbb{Z}$-模.
- 正交性：不可约表示什么时候同构，什么时候不同构，有哪些同构.
  - 定理 2：同态要么为零，要么同构，同构只有数乘.
  - 高观点：$(V, W) \mapsto \dim \mathrm{Hom}_G(V, W)$ 给出了表示环作为自由 $\mathbb{Z}$ 模的标准内积.
- 特征标：表示的同构类和正交关系可以通过特征标完全刻画.
  - 推论 4：通过内积可以计算任意表示的不可约成分组成情况：

$$V \cong \bigoplus_i V_i^{\oplus \langle \chi_V, \chi_{V_i} \rangle}$$

  - 高观点：特征标给出了表示环的复化 $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} R(G)$ 到全体 G 的类函数 $L^2_{\text{class}}(G)$ 的环同态.
- 共轭类：不可约表示的同构类数量等于 G 的共轭类数量.（定理 5）
  - 高观点：上述同态其实是环同构 $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} R(G) \cong L^2_{\text{class}}(G)$；表示环是秩为共轭类数的自由 $\mathbb{Z}$-模，进而（由 Hilbert 基定理，整性等交换代数废话）是一维 Noether 环.
- 正则表示：群代数 $\mathbb{C}[G]$ 通过左作用赋予的 G-模结构具有不可约表示分解

$$\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_i V_i^{\oplus \dim V_i}$$

  从而给出一个对不可约表示维数的限制 $\sum_i (\dim V_i)^2 = |G|$.（定理 6）

本文的主要动机是：

- 提供 Fulton–Harris [FH04, chapter 1–2] 的一个中文速通版本
  - Quantom chemists might find it better to read Serre [Ser77, chapter 1–2] instead :p
- 提供坐标无关、matrix-free 的定义、记号和证明路线
  - 如无必要，勿增实体：减少 ad hoc 定义的使用
- 统一地理解有限群表示论的各种平均化构造
  - G-不变子空间投影 $V \to V^G$、G-不变内积和分裂同态提升
- 为 Peter–Weyl / Wedderburn–Artin 定理

$$\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_i \mathrm{End}(V_i) \cong \bigoplus_i V_i^* \otimes_{\mathbb{C}} V_i$$

  的自顶向下方法做好铺垫.

顺畅阅读本文可能需要读者熟练以下内容：

- 抽象线性代数成熟度：对特征空间、对偶空间和张量积的理解
- 模论成熟度：短正合列、分裂同态与补空间的关系，对 $\otimes$-Hom 对偶关系的理解
- 最基本的群论：共轭类、群作用、群同态

1 通用构造

给定 G-表示 V, W，我们有若干标准的构造表示的手段：

- G-不变子空间 V^G：

  即 $V^G := \{v \in V : \forall g \in G,\, g \cdot v = v\}$.

  注意通过平均化手段，可以获得 $V \to V^G$ 的一个投影

$$v \mapsto \tilde{v} := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot v$$

  使得 G-模正合列

$$0 \longrightarrow V^G \longrightarrow V \longrightarrow V/V^G \longrightarrow 0$$

  左侧分裂——人话是，这一投影是 G-模同态，是满射，且保持 V^G 不变.

- 直和 $V \oplus W$：

  线性空间直和配备 $g \cdot (v, w) := (g \cdot v, g \cdot w)$.

  注意 $(V \oplus W)^G = V^G \oplus W^G$.

- 张量积 $V \otimes_{\mathbb{C}} W$：

  线性空间张量积配备 $g \cdot (v \otimes w) := (g \cdot v) \otimes (g \cdot w)$.

- 对偶空间 $V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$：

  线性空间对偶配备 $g \cdot f := (v \mapsto f(g^{-1} \cdot v))$.

- 线性映射空间 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)$：

  线性空间 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)$ 配备 $g\cdot\varphi := (v\mapsto g\cdot\varphi(g^{-1}\cdot v))$.

  注意线性空间有自然同构 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)\cong V^*\otimes_{\mathbb{C}} W$. 我们设计的定义使得这一同构相容地提升到 G-模之上.

  自同态空间 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V)$.

- G-模同态空间 $\mathrm{Hom}_G(V,W)$：

  保持 G-模结构的所有线性映射同态，其中的同态 φ 满足 $\varphi(g\cdot v) = g\cdot\varphi(v)$.

  注意我们设计的定义使得 $\mathrm{Hom}_G(V,W) = (\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W))^G$.

  计算 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)\to\mathrm{Hom}_G(V,W)$ 的平均化投影 $\varphi\mapsto\tilde{\varphi}$：

  $$\tilde{\varphi}(v) := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(g\cdot\varphi)(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\cdot\varphi(g^{-1}\cdot v)$$

2 不可约表示

不可约表示是没有非平凡子表示的表示. 本节证明完全分解性，并讨论不可约表示间的同态情况.

定理 1（Maschke） 有限群的复表示论是半单的. 即：

- （半单观点）任意 G-模 V 都可以写成不可约表示的直和.

- （分裂同态观点）考虑 G-模正合列

  $$0\longrightarrow U\xrightarrow{\iota} V\xrightarrow{\pi} W\longrightarrow 0$$

  任取其作为线性空间时的一个左分裂同态 $\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,U)$ 使得 $\varphi\circ\iota = \mathrm{id}_U$，我们可以将这一线性映射通过 G-模 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,U)$ 上的平均化投影提升为 G-模同态 $\tilde{\varphi}\in\mathrm{Hom}_G(V,U)$：

  $$\tilde{\varphi}(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\cdot\varphi(g^{-1}\cdot v)$$

  这一提升同态仍保持左分裂性 $\tilde{\varphi}\circ\iota = \mathrm{id}_U$，从而将上述线性空间上左分裂的正合列提升为左分裂的 G-模正合列.

证明 分裂同态与直和的联系是模正合列的标准内容，我们此处略过. 提升同态已经是平均化投影的结果，自然是 G-模同态. 则只需证明提升后同态的分裂性：

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}\circ\iota(u) &= \left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\cdot\varphi(g^{-1}\cdot\iota(u))\right) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\cdot\varphi(\iota(g^{-1}\cdot u)) && \text{by } \iota\in\mathrm{Hom}_G(U,V) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\cdot(\varphi\circ\iota)(g^{-1}\cdot u) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\cdot(g^{-1}\cdot u) && \text{by split property of } \varphi \\
&= u
\end{aligned}$$

半单观点是上述分裂同态观点的直接推论. □

注记（不变内积观点） 尚有一种常见观点我们未做介绍:

- 存在 V 的一个 G-不变内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_G$，从而在此内积意义下的 G-模补空间 $U^\perp$ 使得 $V=U\oplus U^\perp$ 在 G-模的直和分解意义下成立.

这里 G-不变内积是指内积满足 $\langle g\cdot v, g\cdot w\rangle_G=\langle v,w\rangle_G$. 它的构造也是通过“平均化”提升任意 V 作为线性空间上的内积得到:

$$\langle v,w\rangle_G=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle g\cdot v, g\cdot w\rangle$$

平均化内积的操作也可以实现为平均化投影：注意 $\mathbb{C}$ 上的内积是共轭双线性的，因此先填入第二个向量可将其视为 $V\to V^*$ 的共轭线性映射. 记全体共轭线性映射 $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(V,V^*)$，它也有 G-模结构. 在此模上做平均化投影就对应了平均化内积的动作.

【TODO】带共轭的内积观点笔者尚不熟悉，且详细分析其与分裂同态观点的关系需要过多抽象废话，简明流畅起见，我们后日再谈.

定理 2（Schur） 设 V,W 是不可约 G-模，则

$$\mathrm{Hom}_G(V,W)=\begin{cases}\mathbb{C} & V\cong W\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

即同构的不可约表示之间的 G-同态无非是数乘，不同构的不可约表示之间没有非零的 G-同态.

证明 注意任何 G-同态的 ker, im 都是 G-子模.

关于数乘，无妨设 $W=V$. 对任意 V 上的 G-自同态 f，它在 V 中至少有一个非空的特征子空间——一个 G-子模. 由于 V 不可约，这个特征子空间只能是 V，因此 f 是数乘. □

Schur 引理为表示的不可约分解提供了唯一性.

3 特征标

研究特征标的主要原因是它和表示的同构类一一对应，且可以通过内积计算表示的不可约成分组成情况.

表示 $\varphi: G\to \mathrm{GL}(V)$ 的特征标定义为函数 $\chi_\varphi: G\to\mathbb{C}$, $g\mapsto \mathrm{Tr}(\rho(g))$，在模的记号下亦写作 χ_V.

记 $L^2(G)$ 是 $G\to\mathbb{C}$ 的全体函数构成的线性空间，配备内积 $\langle f_1,f_2\rangle:=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}f_1(g)\overline{f_2(g)}$. 特征标们构成 $L^2(G)$ 的一个子空间，但我们还可以做的更好：由于迹的相似不变性，$\chi_V(hgh^{-1})=\chi_V(g)$，故特征标函数在共轭类上取值相同. 将这种 $G\to\mathbb{C}$ 的函数称为类函数，于是特征标都是类函数.

特征标还满足以下性质:

G-wise properties:

- $\chi_V(1)=\dim V$

  对角线全一.

- $\chi_V(g^{-1})=\overline{\chi_V(g)}$

  注意迹是特征值的和，特征值都是单位根，单位根取逆就是共轭，g^{-1} 的特征值是 g 的特征值的逆即可.

G-module-wise properties:

- $\chi_{V\oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g)$
  矩阵分块即可.

- $\chi_{V\otimes_{\mathbb{C}} W}(g) = \chi_V(g)\chi_W(g)$
  矩阵分一堆块即可.

- $\chi_{V^*}(g) = \overline{\chi_V(g)}$
  也就是算 $\rho_{V^*}(g) \in \mathrm{GL}(V^*)$ 的迹，按照 V^* 定义它恰好是 $\rho_V(g^{-1}) \in \mathrm{GL}(V)$ 的对偶映射，再注意到对偶映射的迹等于原映射的迹和 $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$ 即可.

注记 不理解为什么 $\mathrm{Tr}(f^*) = \mathrm{Tr}(f)$?

- 我们有自然同构 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V) \cong V^* \otimes_{\mathbb{C}} V \cong V \otimes_{\mathbb{C}} V^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^*, V^*)$，中间的 $\otimes_{\mathbb{C}}$ 两侧交换对应转置. 迹也可以坐标无关地定义为 V 和 V^* 之间的缩并，从而对偶成为张量积间的交换从而变得无关紧要.

- 或者直接坐标计算. 嗯算就知道矩阵表示成转置关系.

Averaging properties:

- $\langle \chi_V, 1_G \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_V(g) = \dim V^G$
  这是平均化投影 $V \to V^G$ 的迹——因为 V^G 上的元素被投影保持不变.

定理 3

- $\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = \langle \chi_V, \chi_W \rangle$

- 不可约表示的特征标两两正交，模长为 1.

证明 注意

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) &= \dim(V^* \otimes_{\mathbb{C}} W)^G \\ &= \langle \chi_{V^*\otimes_{\mathbb{C}} W}, 1_G \rangle \\ &= \langle \overline{\chi_V}\chi_W, 1_G \rangle \\ &= \langle \chi_V, \chi_W \rangle\end{aligned}$$

当不可约时，前者定理 2 确定 0 / 1 情况，立得正交性. □

推论 4

- 可以通过特征标内积 $\langle \chi_V, \chi_{V_i} \rangle$ 计算表示 V 中不可约成分 V_i 出现了几次：

$$V \cong \bigoplus_i V_i^{\oplus \langle \chi_V, \chi_{V_i} \rangle}$$

- 表示的同构类与特征标一一对应.

- 表示 V 不可约当且仅当 $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$.

证明

- 由定理 1，任意表示都可以写成不可约表示的直和，而特征标与直和相容良好. 结合定理 3 的正交性，故对任意表示 V，通过将它的特征标和某一不可约表示 V_i 的特征标做内积，就可以确定这一表示包含了多少份 V_i.
- 表示固然给出了特征标. 反过来，可以通过上述特征标内积方法确定表示的同构类.
- 只需证 $\Longleftarrow$：结合正交性，我们有若干平方和为 1 的非负整数 $\langle \chi_V, \chi_{V_i}\rangle$，因此有且只有其中一个为 1，其余为 0.

□

4 直和分解的典范投影

已经能够计算表示的不可约成分组成情况了，但尚不清楚如何构造从全空间到其某一不可约成分的显式投影. 本节先直接提供一个不可约表示计数的紧凑证明，而一个典范的投影将在证明中浮现.

定理 5

- 特征标在 $L^2(G)$ 中生成的子空间，恰好是类函数空间.
- 不可约表示的同构类数量等于 G 的共轭类数量.

证明 假如类函数 χ 与每个不可约表示 V_i 的特征标 χ_{V_i} 都正交. 对偶表示 V_i^* 也不可约，故

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \chi, \chi_{V_i^*}\rangle \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\overline{\chi_{V_i^*}(g)} \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\chi_{V_i}(g) \\
&= \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\rho_{V_i}(g)\right)
\end{aligned}$$

对任意表示 V，让我们记

$$\varphi_{\chi,V} := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\rho_V(g) \in \mathrm{End}(V)$$

则刚刚的讨论是在说 $\mathrm{Tr}(\varphi_{\chi,V_i}) = 0$ 对所有不可约表示 V_i 成立.

现在进一步断言对任意表示 V，$\varphi_{\chi,V}$ 其实是一个 G-同态：对任意 $h\in G$，$v\in V$，我们有

$$\begin{aligned}
(h\cdot\varphi_{\chi,V})(v) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\cdot(hgh^{-1}\cdot v) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(hgh^{-1})\cdot(hgh^{-1}\cdot v) && \text{by } \chi \text{ is a class function} \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\cdot(g\cdot v) && \text{by changing summation order} \\
&= \varphi_{\chi,V}(v)
\end{aligned}$$

于是 $\varphi_{\chi,V} \in \mathrm{End}_G(V)$. 由 Schur 定理（定理 2），当 $V = V_i$ 不可约时，φ_{χ,V_i} 是数乘. 又 $\mathrm{Tr}(\varphi_{\chi,V_i}) = 0$，因此 $\varphi_{\chi,V_i} = 0$.

由于 $V \mapsto \varphi_{\chi,V}$ 是 $\oplus$-+ 线性的，因此使用半单性即可将 $\varphi_{\chi,V} = 0$ 推广到任意表示 V. 现在特取正则表示 $V = \mathbb{C}[G]$，注意此时各左乘作用 $\rho_{\mathbb{C}[G]}(g)$ 线性无关，又 $0 = \varphi_{\chi,V} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\rho_V(g)$，因此 $\chi(g) = 0$ 对任意 $g \in G$ 成立，即 $\chi = 0$. □

除了证明的结论以外，在证明路线中我们还得到了一个重要的构造: $\chi \mapsto \varphi_{\chi,V}$ 给出了一个 $L^2(G) \to \mathrm{End}(V)$ 的线性映射.

注记 这个构造其实是自然的：如果将 $L^2(G)$ 通过线性空间同构 $\chi \mapsto \sum_{g\in G}\chi(g)g$ 当作 $\mathbb{C}[G]$ 理解，则 $\chi \mapsto |G| \cdot \varphi_{\chi,V}$ 无非是由 $\varphi_{g,V} := \rho_V(g)$ 线性扩展得到——或者甚至更直接的，就是表示 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ 的线性扩展 $\mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}(V)$!

总结并推广证明过程中得到的该构造的若干性质：[FH04, page 22–23]

- $(\chi, V) \mapsto \varphi_{\chi,V}$ 关于 $\chi \in L^2(G)$ 的加法和表示 V 的直和都是线性的.
- $\mathrm{Tr}(\varphi_{\chi,V}) = \langle\chi, \chi_{V^*}\rangle = \langle\overline{\chi}, \chi_V\rangle$
- 当 χ 是共轭类函数时：$\varphi_{\chi,V}$ 是 G-同态.
- 追加 $V = V_i$ 不可约的条件：此时 φ_{χ,V_i} 是系数为 $\langle\overline{\chi}, \chi_{V_i}\rangle / \dim V_i$ 的数乘.
- 再追加设 V_j 也是不可约表示，取 $\chi = \overline{\chi_{V_j}}$，则

$$\varphi_{\overline{\chi_{V_j}},V_i} = \begin{cases} (1/\dim V_j)\cdot \mathrm{id}_{V_i\cong V_j} & V_i \cong V_j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 现在考虑将 V_i 放松为任意表示，V_j 仍不可约，定义

$$\pi_j := \dim V_j \cdot \varphi_{\overline{\chi_{V_j}},V} = \frac{\dim V_j}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_{V_j}(g)}\rho_V(g)$$

  由于 V 可以写成不可约表示的直和，又结合 $\varphi_{\overline{\chi_{V_j}},V}$ 关于 V 的直和线性性，使用上一条的结果就有：π_j 就是 V 到其全体 V_j 成分的 G-同态投影.

注记 $\chi \mapsto \varphi_{\chi,V}$ 也是 Peter–Weyl 定理 $L^2(G) \cong \mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_i \mathrm{End}(V_i)$ 直和投影的重要组成成分，其也将为我们提供不可约表示计数的一种更自顶向下的证明. 我们后日再谈.

5 正则表示

正则表示将为我们提供对不可约表示维数的平方和限制.

群代数 $\mathbb{C}[G]$ 是一组形式基底 $(e_g)_{g\in G}$ 生成的线性空间，乘法由 $e_{g_1}e_{g_2} := e_{g_1g_2}$ 定义. 作为环，其自带一个左作用得到的 G-模结构，称之为正则表示. 不妨以后把每个 e_g 直接写成 g.

定理 6

- $$\chi_{\mathbb{C}[G]}(g) = \begin{cases} |G| & g = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
- 对任意 G-表示 V，$\langle\chi_{\mathbb{C}[G]}, \chi_V\rangle = \chi_V(1) = \dim V$.

- $\mathbb{C}[G]$ 的不可约表示分解中，每个不可约表示 V_i 恰好出现 $\dim V_i$ 份，即

$$\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_i V_i^{\oplus \dim V_i}$$

- 不可约表示 V_i 的维数满足

$$\sum_i (\dim V_i)^2 = |G|$$

证明 推导路线已经给出，不再赘述. □

参考文献

[FH04] William Fulton and Joe Harris. *Representation Theory*. Vol. 129. Graduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer, 2004. ISBN: 978-3-540-00539-1 978-1-4612-0979-9. DOI: 10.1007/978-1-4612-0979-9. URL: http://link.springer.com/10.1007/978-1-4612-0979-9 (visited on 06/01/2025).

[Ser77] Jean-Pierre Serre. *Linear Representations of Finite Groups*. Vol. 42. Graduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer, 1977. ISBN: 978-1-4684-9460-0 978-1-4684-9458-7. DOI: 10.1007/978-1-4684-9458-7.