

# 对称群的复不可约表示

sun123zxy

2025-06-08\*

我们简明快速地完成对称群的复不可约表示的分类. 本文主要微调自 [FH04, section 4.2], 亦少量参考 [Sag01, chapter 2]. 推荐读者阅读前熟悉群的复表示的基本常识 [FH04, chapter 1-2] 和群代数模的观点.

- 本文为重构版本, 旧版见 [此处](#).

## 1 速览

一个 Young 图由一个整数分拆  $\lambda \vdash n$  唯一确定, 一个 Young 表将一个  $n$  元置换填入 Young 图——本质上是一对信息  $T = T_{\lambda, \sigma} := (\lambda \vdash n, \sigma \in S_n)$ . 如果  $T$  的各行各列均严格单增, 则称  $T$  是标准 Young 表, 记为  $T \in \text{SYT}(\lambda)$ .

• • • •  
• • •  
• •

2 3 9 8  
5 4 6  
7 1

(a) 形状  $\lambda = (4, 3, 2)$  的 Young 图

(b) Young 表  $T = (\lambda \vdash n, \sigma \in S_n)$ , 其形状为  $\lambda = (4, 3, 2)$ , 内容为  $\sigma = 239854671$

图 1: Young 图、Young 表例

置换  $g \in S_n$  作用在全体形状为  $\lambda$  的 Young 表  $T$  上的方式为将数字  $i$  替换为  $g(i)$ , 即  $gT := (\lambda, g\sigma)$ . 易见对称群在固定形状 Young 表上的作用忠实且传递. 作用在给定 Young 表  $T$  上的效果表现为对同行元素的置换的那些置换构成的群记为  $P_T$ , 置换同列元素的记为  $Q_T$ . 易见  $P_T$  和  $Q_T$  交平凡, 两群之并生成整个  $S_n$ .

**注记 (置换计算速记)** 见 [此处](#).

来刻画不同 Young 表行、列置换之间的关系:

- $P_{gT} = gP_Tg^{-1}$
- $Q_{gT} = gQ_Tg^{-1}$

设  $\mathbb{C}[S_n]$  是  $S_n$  的复群代数, 即其复正则表示. 定义:

---

\*最后更新于 2026-03-21.

- 行对称化子  $a_T := \sum_{g \in P_T} g \in \mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$
- 列对称化子  $b_T := \sum_{g \in Q_T} \text{sgn}(g)g \in \mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$
- Young 对称化子  $c_T := a_T b_T$

容易验证对称化子满足如下性质:

**命题 1** 对任意  $p \in P_T, q \in Q_T$ ,

- $pa_T = a_T p = a_T$
- $qb_T = b_T q = \text{sgn}(q)b_T$
- $pc_T q = \text{sgn}(q)c_T$

对任意  $g \in \mathcal{S}_n$ , 有:

- $a_{gT} = ga_T g^{-1}$
- $b_{gT} = gb_T g^{-1}$
- $c_{gT} = gc_T g^{-1}$

Young 表  $T$  诱导得到的 Specht 模  $V_T$  定义为  $\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]c_T$ , 于是  $\mathcal{S}_n$  复不可约表示分类描述如下:

- 每个 Specht 模都是  $\mathcal{S}_n$  的不可约表示
- 两个 Specht 模同构当且仅当诱导它们的 Young 表具有相同的形状
- $\mathcal{S}_n$  的每个不可约表示都同构于某一 Specht 模

## 2 Schur 引理与正交关系

我们关心的所有 Specht 模的性质可以紧凑地写为如下命题:

**定理 2** 设  $T, S$  是大小均为  $n$  的 Young 表, 则 Specht 模  $V_T, V_S$  间的全体  $\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$ -同态  $\text{Hom}_{\mathcal{S}_n}(V_T, V_S)$  维数为 1 当且仅当 Young 表  $T, S$  形状相同, 否则为 0.

即要求我们验证 Specht 模们满足 Schur 引理和特征标的正交关系——根据有限群表示论的基本结果, 这将自动导出每个 Specht 特征标的不可约性和它们之间的同构情况. 再利用对称群的共轭类数等于整数分拆数等于 Young 表形状数的事实, 我们就完成了  $\mathcal{S}_n$  的复不可约表示的分类.

注意特征标内积是对称的, 所以每对无序 Young 表只需要计算一次维数即可.

## 3 Hom 的新刻画

假定我们已经证明  $c_T$  是  $\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$  中的幂等元 (或其常数倍), 则上述 Hom 空间有更好的刻画:

**命题 3** 作为  $\mathbb{C}$ -线性空间:

$$\text{Hom}_{\mathcal{S}_n}(V_T, V_S) \cong c_T \mathbb{C}[\mathcal{S}_n] c_S$$

这一结果由如下一般的命题提供:

**命题 4** 对任意含么环  $R$ ,  $R$ -模  $M$  和幂等元  $e \in R$ , 我们有典范的  $Z_R(e)$ -模同构

$$\begin{aligned} eM &\cong \text{Hom}_R(Re, M) \\ em &\mapsto (re \mapsto rem) \end{aligned}$$

这里  $Z_R(e)$  是环  $R$  中所有与  $e$  交换的元素构成的子环.

**证明** 这是因为每个  $Re \rightarrow M$  的  $R$ -同态  $\varphi$  都由  $e \mapsto \varphi(e)$  唯一确定, 且  $\varphi(e) = \varphi(e^2) = e\varphi(e) \in eM$ . 至于模结构,  $\text{Hom}_R(Re, M)$  的模结构取决于  $Re$  的右模结构, 故  $Z_R(e)$  是自然的选择, 验证不难.  $\square$

于是如果暂时先承认  $c_T$  是  $\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$  中的幂等元 (或其常数倍), 则作为  $\mathbb{C}$ -线性空间,

$$\text{Hom}_{\mathcal{S}_n}(V_T, V_S) = \text{Hom}_{\mathcal{S}_n}(\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]c_T, \mathbb{C}[\mathcal{S}_n]c_S) \cong c_T\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]c_S$$

根据上述讨论, 接下来的首要任务是研究  $c_T$  的幂等性和  $c_T\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]c_S$  的维数. 注意  $c_T = a_T b_T$  且  $c_T x c_S = a_T (b_T x a_S) b_S$ , 故两个问题都需要我们更详细地研究  $a_T x b_S$  的性质——更一般地, 满足对任意  $p \in P_T, q \in Q_S$  成立  $pxq = \text{sgn}(q)x$  的元素  $x \in \mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$  的性质.

## 4 同形状的情形

首先介绍一个必要的组合结果.

**命题 5 (同形状 Young 表的 S.R.D.C.<sup>1</sup>)** 设  $T, S = gT$  是形状为  $\lambda$  的两个 Young 表, 则以下条件等价:

1. 任意一对  $T$  中同行的数字均落在  $S$  中的不同列. 即不存在对换  $(i, j) \in P_T \cap Q_S = P_T \cap gQ_T g^{-1}$ .
2. 存在  $p \in P_T, q' \in Q_S$  使得  $pT = q'S$
3. 存在  $p \in P_T, q \in Q_T$  使得  $g = pq$

**证明 (1)  $\Rightarrow$  (2):** 如图所示, 将  $T$  中第一行全体元素取出, 其在  $S$  中的对应元素必然在不同列. 因此, 可以通过  $S$  上的列置换将其移至  $S$  的第一行. 随后对  $T$  的第一行元素做行置换即可使得  $T$  的第一行与  $S$  的第一行相同. 顺次对第二行, 第三行完成上述操作即可.

$$\begin{array}{ccccccc} & i & j & k & l & & l & k & i & j & & \\ T & * & * & * & & \xrightarrow{p_1 \in P_T} & * & * & * & & \xrightarrow{p_2 \in P_T} & \dots \\ & * & * & & & & * & * & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & l & * & * & j & & l & k & i & j & & \\ S & * & * & i & & \xrightarrow{q'_1 \in Q_S} & * & * & * & & \xrightarrow{q'_2 \in Q_S} & \dots \\ & * & k & & & & * & * & & & & \end{array}$$

**(2)  $\Rightarrow$  (3):** 设  $q' = gqg^{-1}$ , 其中  $q \in Q_T$ . 则  $pT = q'S = (gqg^{-1})(gT) = gqT$ , 即  $p = gq$  或  $g = pq^{-1}$ .

**(3)  $\Rightarrow$  (1):** 考虑  $T$  中的某一行的数字.  $q$  对  $T$  的作用将它们上下平移.  $p$  对  $qT$  的作用再对它们做一个内部的置换. 操作结束后, 它们仍在不同列.  $\square$

<sup>1</sup>Same row, different column

**注记** 值得一提,  $P_T, Q_T$  并不互相交换, 二者的乘积也不构成群.

**命题 6 (Young 对称化子的唯一性)** 设  $c \in \mathbb{C}[S_n]$  满足对任意  $p \in P_T, q \in Q_T$ , 有  $pcq = \text{sgn}(q)c$ , 则  $c \in \mathbb{C}c_T$ , 即  $c$  在模掉标量乘法意义下唯一.

**证明** 不妨设  $c = \sum_{g \in S_n} n_g g$  是满足对任意  $p \in P_T, q \in Q_T$ , 有  $pcq = \text{sgn}(q)c$  的某一  $\mathbb{C}[S_n]$  中元素. 对此式对比系数立得  $n_{pgq} = \text{sgn}(q)n_g$ .

注意我们已经知道满足这条件的 Young 对称化子

$$c_T = a_T b_T = \sum_{p \in P_T} \sum_{q \in Q_T} \text{sgn}(q) pq$$

所以我们应当指望, 也只需证明如下两个事实:

- 对任意  $p \in P_T, q \in Q_T$ ,  $n_{pq} = \text{sgn}(q)$  乘上某个常数.

特取  $g = 1$  得  $n_{pq} = \text{sgn}(q)n_1$ , 相对  $n_1$  唯一.

- 对所有  $g \notin P_T Q_T$ , 有  $n_g = 0$  成立.

由命题 5, 此时存在对换  $p := (i, j) \in P_T \cap Q_S = P_T \cap g Q_T g^{-1}$ . 于是可取对换  $q := g^{-1} p g \in Q_T$ , 这样就有

$$n_g = n_{pg(g^{-1}pg)} = n_{pgq} = \text{sgn}(q)n_g = -n_g$$

因此  $n_g = 0$ . □

**推论 7**  $a_T x b_T \in \mathbb{C}c_T$  对任意  $x \in \mathbb{C}[S_n]$  成立. 特别地,  $c_T^2 = \alpha c_T$ , 这里幂等系数  $\alpha = n! / \dim V_T$ .

**证明** 只需计算  $\alpha$ . 考察右乘线性变换

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[S_n] &\rightarrow V_T \\ x &\mapsto x c_T \end{aligned}$$

已经知道它是投影变换的非零常数倍, 因此这线性变换的迹  $\text{tr}(x \mapsto c_T x) = \alpha \dim V_T$ . 考察  $c_T g = a_T b_T g$  的  $g$  分量对应系数, 注意  $P_T$  和  $Q_T$  交平凡, 故此系数为 1, 于是  $\text{tr}(x \mapsto c_T x) = n!$ , 因此  $\alpha = n! / \dim V_T$ . □

**推论 8** 对同形状 Young 表  $T, S$ ,  $\dim c_T \mathbb{C}[S_n] c_S = 1$ .

**证明** 设  $S = gT$ , 则  $c_T \mathbb{C}[S_n] c_S = c_T \mathbb{C}[S_n] c_T g^{-1}$ , 因此只需考察  $c_T \mathbb{C}[S_n] c_T$  的维数. 这由推论 7 保证. □

## 5 不同形状的情形

受之前命题 5 刻画同形状 Young 表间群作用关系的启发, 我们可能也需要从组合上对 Young 表形状不同一事做一点文章.

在分拆上定义一个偏序  $\trianglelefteq$ :  $\lambda \trianglelefteq \mu$  当且仅当  $\lambda$  的每个前缀和都小于等于  $\mu$  的对应前缀和. 注意字典序  $\leq$  是  $\trianglelefteq$  的一个细化版本.

下设  $T, S$  为形状分别为  $\lambda, \mu \vdash n$  的 Young 表.

**命题 9 (不同形状 Young 表的 S.R.D.C.)**

1. 若任意一对  $T$  中同行的数字均落在  $S$  中的不同列, 则  $\lambda \supseteq \mu$ .
2. 若  $\lambda \not\supseteq \mu$ , 则存在一对互异数字  $(i, j)$  既落在  $T$  中同一行, 也落在  $S$  中同一列. 即存在对换  $(i, j) \in P_T \cap Q_S$ .
3. 若  $\lambda \not\supseteq \mu$ , 则对任意  $g \in \mathcal{S}_n$ , 存在对换  $(i, j) \in P_T \cap Q_{gS} = P_T \cap gQ_Sg^{-1}$ .

**证明** 上述命题中, (2) 是 (1) 的逆否命题, 在 (2) 中取新的  $S$  为  $gS$  即可得 (3), 故只需证明 (1). 这是因为可以使用与命题 5 类似的方法, 在对  $T$  做行置换和对  $S$  做列置换后, 确保对每个  $i$ ,  $T$  的前  $i$  行元素都落在  $S$  的前  $i$  行. 数数就得到  $\lambda \supseteq \mu$ . 详细证明可参考 [Sag01, lemma 2.2.4].  $\square$

**命题 10** 若  $\lambda \not\supseteq \mu$ , 则不存在非零元  $c \in \mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$  使得  $pcq = \text{sgn}(q)c$  对任意  $p \in P_T, q \in Q_S$  成立.

**证明** 设  $c = \sum_{g \in \mathcal{S}_n} n_g g$ , 对比系数仍有  $n_{pgq} = \text{sgn}(q)n_g$ . 用命题 9, 取  $p = (i, j), q = g^{-1}pg$  就有

$$n_g = n_{pg(g^{-1}pg)} = n_{pgq} = \text{sgn}(q)n_g = -n_g$$

因此  $n_g = 0$  对任意  $g$  成立.  $\square$

**推论 11** 若  $\lambda \not\supseteq \mu$  (或更特殊地,  $\lambda < \mu$ ), 则  $a_T \mathbb{C}[\mathcal{S}_n] b_S = 0$ . 特别地,  $\dim_{\mathbb{C}} c_T \mathbb{C}[\mathcal{S}_n] c_S = 0$ .

综上, 我们完成了  $\mathcal{S}_n$  的复不可约表示的分类: 它们恰为全体 Specht 模  $V_T$ , 其中  $T$  是形状为  $\lambda \vdash n$  的 Young 表. 两个 Specht 模同构当且仅当诱导它们的 Young 表具有相同的形状.

## 6 双边理想分解

注意任何同形状 Young 表  $T, S := gT$  的 Specht 模  $V_T$  和  $V_S$  间有典范表示同构  $x_{c_T} \mapsto x_{c_T} g^{-1}$ , 故  $\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$  至少有如下双边理想分解:

$$\mathbb{C}[\mathcal{S}_n] = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathbb{C}[\mathcal{S}_n] c_\lambda \mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$$

这里  $c_\lambda$  是任意一个形状为  $\lambda$  的 Young 表的 Young 对称化子.

**注记** 这是 Peter–Weyl 定理 / Wedderburn–Artin 定理在  $\mathcal{S}_n$  上的一个具体实例.

也长得很像 Bruhat 分解

$$\text{GL}_n = \bigsqcup_{w \in \mathcal{S}_n} BwB$$

## 7 自对偶

$\mathcal{S}_n$  表示论的一个重要结果是所有  $\mathcal{S}_n$  的表示都是自对偶的, 即对任意  $\mathcal{S}_n$  的表示  $V$ , 有

$$V \cong V^*$$

这同构有两种理解方式:

- 作为左模的同构:  $V$  上左作用  $g \cdot v$  自然,  $V^*$  上配备  $(\sigma \cdot f)(v) := f(\sigma^{-1} \cdot v)$ .
- 作为右模的同构:  $V$  上右作用  $v \cdot \sigma := \sigma^{-1} \cdot v$ ,  $V^*$  上右作用  $(f \cdot \sigma)(v) := f(\sigma \cdot v)$  自然.

两侧是对偶的, 只需证明一侧. 可以考虑特征标:  $\mathcal{S}_n$  的共轭类由置换的轮换型给出, 而  $\sigma$  和  $\sigma^{-1}$  有相同轮换型, 故在同一共轭类, 故  $V$  和  $V^*$  的特征标相同, 进而同构.

注记 (自对偶、特征标与双线性型) 一般来说:

- 有限群复表示自对偶当且仅当特征标是实函数
- 自对偶相当于保证  $V$  上有一个非退化的  $\mathcal{S}_n$ -不变双线性型
- 群代数上总有标准的非退化  $G$ -不变双线性型, 从而自对偶

一般来说, 怎样显式构造这个双线性型呢?

可以考虑随意取一  $V$  上双线性型做平均化得到不变双线性型. 如果  $V$  不可约, Schur 引理保证平均化后的双线性型要么为零, 要么非退化. 于是可以取  $V^*$  一组基底  $(f_i)$  并遍历  $f_i \otimes f_j$  实验平均化后是否非退化. 对可约的情况, 可以分解成不可约成分后做.

## 8 Garnir 关系与 Specht 模的基底

我们为每个 Specht 模构造一个显式基底. 因为同形状 Young 表诱导的 Specht 模之间有典范同构, 可以只研究最标准的那个从左到右, 从上到下标号的 Young 表  $T_{\lambda, \text{id}}$  诱导的 Specht 模. 以后在无歧义的情况下, 直接用  $\lambda$  来代指此这个最标准的 Young 表.

**定理 12**  $V_\lambda$  的一组基底为  $\{gc_\lambda : T_{\lambda, g} \in \text{SYT}(\lambda)\}$ , 即  $g$  取遍所有标准 Young 表对应的置换.

对任意  $g \in \mathcal{S}_n$ , 我们尝试将  $gc_\lambda$  写成上述基底的线性组合. 首先可以对  $g$  右乘  $P_\lambda$  元素而保持  $gc_\lambda$  不变, 故问题约化为  $g$  对应 Young 表已经按行升序排列的情形.

如果  $g$  已经对应标准 Young 表, 则没有需要做的事情. 否则, 必然两个同列、相邻行的位置对满足靠上的数字大于靠下的数字. 不妨设它们分别是第  $i$  行第  $j$  列的  $r$  和第  $i+1$  行第  $j$  列的  $s$ :

$$\begin{array}{cccc} & & r & < & * & < & * \\ & & & & \vee & & \\ * & < & * & < & s \end{array}$$

TODO: this part is under construction

## 附录

### 习题 13

- 证明通过相邻数字对换操作足以沟通所有标准 Young 表.
- 证明 Specht 模的维数为其对应 Young 图对应标准 Young 表数量, 一组显式基底为  $\{gc_T\}$ , 其中  $g$  取遍所有标准 Young 表对应的置换.
- 确定具体对哪些  $g \in \mathcal{S}_n$ , 作为  $\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$  的子模有  $V_T = V_{gT}$ .

注记 (关于使用到的复数域  $\mathbb{C}$  的特殊性质)

- 我们使用了  $\mathbb{C}$  特征不整除  $n!$  导致的群代数  $\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$  的半单性.
- 我们使用了群的复不可约表示数量等于群的共轭类的数量的结果.
- 其它论证没有用到  $\mathbb{C}$  的特殊性质.

注记 (关于对称化子的组合看法)  $P_T$  中的元素在左作用到  $g \in \mathcal{S}_n$  时, 是对  $T$  中同行的数字做字面上的数字置换; 在右作用时是将  $\sigma$  (从左到右, 从上到下) 排入  $T$  后做其上的行置换.  $Q_T$  同理.

$\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$  可以看作  $\mathcal{S}_n \rightarrow \mathbb{C}$  的函数空间, 配备双边群作用  $(g_1 \cdot \chi \cdot g_2)(h) = \chi(g_1^{-1} h g_2^{-1})$ .

- $a_T\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$  中的函数, 交换两个出现在  $T$  中同行的数字, 函数值不变;
- $\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]b_T$  中的函数, 交换  $T$  中同列的两个位置, 改变符号.
- $a_T\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]b_T$  中的函数同时满足以上两条性质.

其它经典的组合看法还有关于  $a_T\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$  是“tabloid”的看法 [Sag01, Definition 2.1.4], 是诱导表示  $1 \uparrow_{P_T}^{\mathcal{S}_n}$  的看法等.

**注记 (关于  $P_T Q_T \cap Q_T P_T$  的一个错误猜想, 已隐藏)**  $\alpha$  也应等于  $c_T^2$  在单位元处的系数

$$[\text{id}_{\mathcal{S}_n}]c_T^2 = \sum_{\substack{p_1, p_2 \in P_T \\ q_1, q_2 \in Q_T \\ p_1 q_1 p_2 q_2 = \text{id}_{\mathcal{S}_n}}} \text{sgn}(q_1) \text{sgn}(q_2)$$

猜想求和中的每一项都满足  $\text{sgn}(q_1) = \text{sgn}(q_2)$ , 这样就有

$$\alpha = |P_T Q_T \cap Q_T P_T|$$

然而这并不正确. 使用如下 Sage 代码可以验证:

```
# Define the symmetric group
S = SymmetricGroup(8)

"""
1 2 3
4 5 6
7 8
"""

P_gens = [S((1,2)), S((2,3)),
          S((4,5)), S((5,6)),
          S((7,8))]
Q_gens = [S((1,4)), S((4,7)),
          S((2,5)), S((5,8)),
          S((3,6))]

# Create the subgroups P and Q
P = S.subgroup(P_gens)
Q = S.subgroup(Q_gens)

print("P", len(P))
print("Q", len(Q))

PQ = Set([p * q for p in P for q in Q])
QP = Set([q * p for q in Q for p in P])

print("PQ:", len(PQ))
```

```
print("QP:", len(QP))

# Compute the intersection of P and Q
cap = PQ.intersection(QP)

# Display the intersection
print("PQ cap QP:", len(cap))
```

## 参考文献

- [FH04] William Fulton and Joe Harris. *Representation Theory*. Vol. 129. Graduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer, 2004. ISBN: 978-3-540-00539-1 978-1-4612-0979-9. DOI: [10.1007/978-1-4612-0979-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0979-9). URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4612-0979-9> (visited on 06/01/2025).
- [Sag01] Bruce E. Sagan. *The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*. Second Edition. Vol. 203. Graduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer, 2001. ISBN: 978-1-4419-2869-6 978-1-4757-6804-6. DOI: [10.1007/978-1-4757-6804-6](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6804-6). (Visited on 09/20/2024).